LA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS RELATIVOS AL AZAR Y LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO UNIVERSITARIOS

Barragués Fuentes, José Ignacio[1] **y Guisasola Aranzabal, Jenaro**[2]
[1] Universidad del País Vasco. Departamento de Matemática Aplicada
mapbafuj@sp.ehu.es
[2] Universidad del País Vasco. Departamento de Física Aplicada I
wupguarj@sc.ehu.es

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio sobre el modo en que se introducen los conceptos relativos al azar y la probabilidad en una muestra de 34 libros de texto universitarios. Nuestro enfoque se ha centrado en determinados componentes de tipo epistemológico y didáctico. Los resultados del estudio parecen indicar la ausencia en la mayoría de los textos de ciertos aspectos importantes del marco teórico de las matemáticas que podrían ser explotados para aproximarse al objetivo de lograr un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

Palabras clave. Azar y probabilidad, revisión de libros de texto, aprendizaje con comprensión, epistemología, concepciones alternativas, heurística de accesibilidad, heurística de representatividad, sesgo de equiprobabilidad, sesgo determinista.

Introducing concepts related to chance and probability in university textbooks

Summary. In this work, we present a study on the way in which the concepts related to chance and probability are introduced in a sample of 34 university text books. The approach has been centered on certain epistemological and didactic components. The results of the study seem to indicate the absence, in the majority of texts, of certain important aspects of the theoretical frame of mathematics. Finally, these missing aspects might be exploited to come closer to the objective of achieving a significant learning on the part of the students.

Keywords. Chance and probability, textbooks review, meaningful learning, epistemology, misconceptions, availability heuristics, representativeness heuristics, equiprobability bias, deterministic bias.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que aquí presentamos es parte de una investigación más general que hemos llevado a cabo acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de la probabilidad en primer ciclo de universidad en escuelas de ingeniería técnica industrial (Barragués, 2002). Esta investigación general tuvo tres propósitos fundamentales: *a*) descubrir las principales dificultades que tienen los alumnos a la hora de comprender los conceptos y procedimientos básicos relativos al azar y la probabilidad; *b*) estudiar si la enseñanza habitual de estos conceptos da lugar a un aprendizaje con comprensión; *c*) diseñar una enseñanza alternativa capaz de mejorar el aprendizaje. En nuestra opinión, el objetivo *c* es inviable mientras no conozcamos explicaciones de por qué los alumnos no logran un aprendizaje con comprensión. Por ello nos parece importante explicar los trabajos que hemos realizado en esa dirección.

En trabajos anteriores hemos analizado algunos aspectos relativos al primer objetivo (Guisasola y Barragués, 2002a, 2002b). Para abordar el segundo objetivo fue necesario enumerar y analizar los diversos aspectos implicados en el proceso de E/A habitual de la teoría elemental de la probabilidad en primer ciclo de universidad y, puesto que el libro de texto es un elemento clave de la enseñanza, realizamos un análisis del modo en que se presenta en una muestra de libros de texto de nivel universitario. En este trabajo expondremos algunos de los aspectos más significativos de nuestro análisis.

La investigación didáctica ha señalado en repetidas ocasiones que el libro de texto es el más importante de los recursos que usan los profesores en sus clases (Otero, 1985; Izquierdo y Ribera, 1997). Del Carmen y Jiménez (1997) afirman que los libros de texto han sido y continúan siendo el material curricular más utilizado para la enseñanza de las ciencias en todos los niveles educativos. Tanto es así, que en ocasiones se identifica material curricular con libros de texto. Ortiz (1999) y Ortiz y otros (1996) resaltan una faceta de los libros de texto que nos parece especialmente sensible. Si en un libro de texto, afirma Ortiz, aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a sus alumnos. Así pues, el profesor que lo usa debe mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto que recomienda.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Para analizar una propuesta de enseñanza, como es en este caso la de la organización y secuenciación de un curso de introducción a la teoría de la probabilidad en los libros de texto, nos parece necesario en primer lugar explicitar qué entendemos por comprender los objetos matemáticos en cuestión. Y para ello, como indica Godino (1996), deben estudiarse la estructura de tales objetos y las formas o modos posibles de comprenderlos, los aspectos o componentes que es posible y deseable que determinados estudiantes en determinadas circunstancias aprendan. En este mismo sentido, Espinoza y Azcárate (1998) apuntan que no puede abordarse un problema didáctico sin tener en cuenta el propio conocimiento matemático y la actividad matemática involucrados en el mismo.

Todos los aspectos que han sido objeto de nuestro estudio epistemológico tienen cabida en el marco teórico fenomenológico (Freudenthal, 1983). Como indica Puig (1997), el análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que dicha estructura sirve como medio de organización y qué relación tiene con ellos. La descripción de esta relación ha de mostrar de qué manera la estructura matemática actúa sobre los fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos.

Si bien esta descripción ha de tomar las matemáticas en su desarrollo y uso actuales, Freudenthal se refiere también a una importante óptica de análisis: la fenomenología histórica. Se trata de la toma en consideración de los fenómenos para cuya organización históricamente se creó la estructura matemática y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

Así pues, por una parte fue necesario realizar un análisis de diversos aspectos epistemológicos de los conceptos básicos relativos al azar y la probabilidad, destinado a clarificar el significado y el uso de la teoría de la probabilidad: en qué tipo de problemas se hace necesario el enfoque probabilístico, en qué consisten las soluciones que aporta, cuáles son sus significados, cuál es su alcance, qué metodologías se utilizan para obtenerlas. Y por otra parte, una revisión histórica del concepto de *probabilidad* nos reveló qué fenómenos trataron originariamente de analizarse con él, a qué fenómenos se extendió este análisis, qué dificultades y obstáculos hubieron de superarse en el proceso de construcción de la teoría de la probabilidad como ciencia.

Este análisis epistemológico e histórico nos permitió caracterizar qué concepción de la probabilidad debe enseñarse para aprovechar su potencial en la práctica de las disciplinas técnicas y, por tanto, qué aspectos clave debíamos examinar en los libros de texto. Seguidamente observaremos la teoría de la probabilidad desde tres puntos de vista diferentes. En primer lugar, la observaremos como marco teórico en la construcción de modelos matemáticos útiles para intervenir con éxito en la realidad; después, como una evidencia más de la naturaleza problemática del proceso de construcción del conocimiento científico. Finalmente, su consideración histórica nos revelará los saltos cualitativos más importantes que tuvieron lugar. Evidentemente ninguno de estos puntos de vista es estanco ni independiente de los demás.

1. Modelos probabilísticos

Si se adopta una conceptualización de las matemáticas según la cual sus contenidos, métodos y significados tienen como objetivo estudiar fenómenos observables y predecir sus futuros estados, desde esa óptica se asigna un papel fundamental a la construcción de modelos capaces tanto de explicar la evidencia experimental como de predecir las propiedades adicionales de dichos fenómenos (Weller, 1995; Hennessy et al., 1995; Meyer, 1992). Se construyen modelos matemáticos que toman en consideración un subconjunto de factores manejable y a la vez responsable, en lo fundamental, del fenómeno bajo estudio. Es en esta tarea de selección de factores o emisión de hipótesis donde comienza la discusión acerca de qué modelos son apropiados para describir ciertos fenómenos. Existen muchos fenómenos observables interesantes para los cuales un modelo determinista puede ser suficiente. Ahora bien, existen otros muchos fenómenos que necesitan un modelo matemático cualitativamente diferente, el modelo probabilístico, para el cual las condiciones de partida no determinan un resultado único sino una distribución probabilística de los resultados observables. Además, la respuesta que la teoría probabilística aporta ante problemas reales que se plantean no es una simple aceptación de la «insuficiencia» de nuestros conocimientos para lograr soluciones «exactas», sino que el principio fundamental consiste en que, cuando deja de estudiarse el comportamiento de un individuo y pasa a estudiarse amplias poblaciones de ellos, pueden surgir nuevas regularidades de un género diferente (Gnedenko, 1995).

La voluntad explícita de simplificación a que hemos hecho referencia constituye una característica esencial de la aproximación científica, lo cual introduce elementos de artificialidad que no deberían ser ocultados al alumno. A este respecto, Barnea (1996) observa que muchos profesores, además de emplear un único modelo para estudiar el fenómeno, no enfatizan en el hecho de que los sistemas reales no se comportan exactamente igual que ningún modelo. En consecuencia, las percepciones de los estudiantes pueden ser parciales y erróneas, alejadas de una concepción científica del trabajo.

2. La naturaleza problemática de la construcción del conocimiento científico

En el apartado anterior nos hemos referido a la utilidad de las matemáticas para estudiar fenómenos observables y, por tanto, para dar respuesta a problemas. Pues bien, en los últimos años cobra más y más interés la idea de que las matemáticas deben presentarse a los estudiantes desde una óptica social y cultural, en la que la controversia y el debate ganan terreno a la visión inmovilista de la elaboración del conocimiento matemático, en la que las teorías matemáticas aparecen como una actividad humana más, inmersa en las relaciones entre la ciencia, la técnica y la sociedad (CTS) (Kilpatrick, 1981; Waldegg, 1986; Gil y De Guzmán, 1993). Así pues, deben encontrarse medios para sugerir a los alumnos que las matemáticas cuentan con fuertes vinculaciones con los asuntos humanos. Estas referencias a implicaciones técnicas, sociales y científicas ofrecerán una visión contextualizada de la construcción del conocimiento científico y pueden ayudar a despertar el interés de los estudiantes hacia la metodología científica y la actitud positiva hacia la ciencia y hacia la teoría de la probabilidad en particular.

También hemos hablado del papel que la ciencia asigna a la construcción de modelos matemáticos. Pues bien, diversos trabajos teóricos han caracterizado el proceso de construcción de modelos como un proceso general de resolución de problemas y señalan la importancia que, para el aprendizaje, tiene esta tarea (NCTM, 1989). Así, por ejemplo, los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) afirman que los estudiantes aprenden matemáticas construyendo activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y el conocimiento previo y, para facilitar esa construcción, recomiendan la realización de actividades destinadas a que los alumnos tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales, concediendo especial importancia a la resolución de problemas, al desarrollo del razonamiento y la argumentación, huyendo del operativismo mecánico.

Ciertamente existen diferentes concepciones de lo que significa el término *situación problemática*. No obstante, tales concepciones son coincidentes en el hecho de considerar que una situación sólo puede ser calificada como problema en la medida en que resulta desconocida y sus soluciones no son inmediatamente accesibles (Polya, 1945). Naturalmente, nos interesamos por aquellas situaciones problemáticas que son abordables mediante actividades de matematización. Estas actividades, según Freudenthal (1991), incluyen inventar simbologías adecuadas para representar el propio problema y las soluciones encontradas, justificar tales soluciones y generalizarlas a otros contextos y otras situaciones problemáticas (Cobo y Batanero, 2004). Al planteamiento de situaciones problemáticas abiertas que justifiquen el nuevo concepto debe añadirse un acompañamiento metodológico que incluya tareas como las siguientes:

– tratamiento cualitativo de las situaciones;

– experimentación con una diversidad de modelos;

– realización de experimentos;

– emisión de hipótesis justificadas, toma de decisiones;

– confrontación de las predicciones formuladas con los datos reales;

a fin de que el alumno profundice en el fenómeno objeto de estudio y en el significado de los conceptos involucrados.

La naturaleza problemática del proceso de construcción de la ciencia se hace muy visible en un análisis histórico de la construcción de la teoría de la probabilidad como ciencia. Consideraremos con mayor detalle la perspectiva histórica en el próximo apartado. Ahora queremos mostrar que la controversia ha acompañado a todos los conceptos importantes desde su génesis. Veamos algunos puntos especialmente conflictivos, que aún hoy siguen siendo motivo de reflexión.

a) La regla «favorables sobre posibles»

Según la concepción clásica, la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades es la proporción del número de casos favorables respecto al número de casos posibles, siempre que todos los resultados tengan «idéntica verosimilitud» o sea aplicable el «principio de indiferencia», que, en definitiva, no son otra cosa que la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales. De acuerdo con esta definición, el cálculo de la probabilidad de los sucesos se reduciría a un simple problema de análisis combinatorio. No obstante, esta definición se encontró inadecuada incluso en su época. Veamos algunas de las dificultades que conlleva.

En primer lugar, la definición es circular (Díaz et al., 1996; Steinbring, 1991). La hipótesis de equiprobabilidad que Laplace enuncia como «resultados igualmente probables» exige una aplicación previa del concepto de *probabilidad*. Por tanto, se trata de una definición que hace uso del propio concepto que se está tratando de definir. Merece la pena recordar al respecto que las definiciones circulares han sido origen de diversas paradojas desde finales del siglo XIX (Whitehead y Russel, 1910; Kline, 1980; De Lorenzo, 1974). La segunda de las dificultades de la definición clásica de probabilidad es su limitado ámbito de aplicación. Se trata de una definición muy restrictiva, que exige el inventario previo de un conjunto de alternativas simétricas que garanticen la equiprobabilidad.

b) Probabilidad frecuencial

Richard Von Mises (1883-1953) fue uno de los pioneros (1919) en la búsqueda de una axiomatización para la teoría de la probabilidad, en este caso basada en la interpretación frecuencial y en el teorema de Bernoulli (ley de los grandes números). El planteamiento frecuencial es en general útil siempre que se manejan grandes cantidades de datos, pero tiene inconvenientes desde varios puntos de vista. En primer lugar, no es posible evaluar la probabilidad, sino dar una estimación de ella, puesto que el número de ensayos es finito. Además, existen situaciones en las que no es posible ejecutar el experimento indefinidamente bajo las mismas condiciones. Finalmente, como indican Borovcnik y otros (1991), el concepto de *convergencia* que subyace a esta concepción de probabilidad no es el de una convergencia sucesional en sentido clásico de las frecuencias relativas, sino que se basa –aún peor– en el propio concepto de probabilidad. En efecto, siendo A un suceso de probabilidad p(A) y $f_n(A)$ su frecuencia relativa tras *n* ejecuciones independientes del experimento aleatorio, no converge hacia cero la sucesión $X_n = |f_n(A)-p(A)|$, sino que converge hacia la unidad la sucesión de probabilidades $Y_n = p(|f_n(A)-p(A)|<\varepsilon)$ para cada valor arbitrario $\varepsilon > 0$ que se fije de antemano. Lo que converge es una sucesión de probabilidades, de modo que o bien se emplea el mismo concepto que se trata de definir, con lo cual se entra en una circularidad al igual que ocurría con la definición clásica, o bien se necesitaría clarificar esta segunda acepción de la probabilidad. Los intentos de Von Mises para resolver el problema según ésta segunda vía han generado principios filosóficamente tan oscuros como el esgrimido por Laplace para justificar la equiprobabilidad.

c) El punto de vista subjetivista

Existen muchos fenómenos impredecibles que no se prestan a una repetición indefinida, pero que también pueden requerir un análisis probabilístico. La asunción básica de los subjetivistas es que la probabilidad es un grado de creencia personal, un nivel de convicción acerca de una afirmación determinada, un juicio personal acerca de un fenómeno que es impredecible bajo el conjunto de hipótesis establecido. Para un subjetivista existen dos categorías de información, una previa y una empírica. La información previa se encontraría en la mente del individuo y sería independiente de cualquier dato experimental. La información empírica se obtendría de las frecuencias observadas en una repetición de experimentos. Ambos tipos de información se combinan en la fórmula de Bayes para dar lugar a una nueva probabilidad del suceso en cuestión. Así pues, el valor de la probabilidad depende de sujeto que la calcula y, por tanto, diferentes personas pueden asignar probabilidades distintas para un mismo suceso. Este punto de vista, presentado por vez primera en 1926 por Frank Plumptom Ramsey (1903-1930), recibió un considerable empuje en la década de los cincuenta por parte de Leonard Jimmie Savage (1917-1971).

d) El punto de vista estructuralista

La probabilidad formal, normativa u objetiva (Díaz et al., 1996) sería un concepto implícitamente definido por un sistema de axiomas y el cuerpo de definiciones y teoremas que se deriva de ellos. Los teoremas indican de qué modo una probabilidad se obtiene a partir de otras probabilidades, pero no ofrecen ninguna sugerencia acerca de cómo deben interpretarse los valores numéricos. El punto de vista estructuralista no clarifica la naturaleza de la probabilidad, pero al menos sirve como marco de trabajo para las restantes concepciones.

3. Consideración histórica de la teoría de la probabilidad

a) La tardía conceptualización de la probabilidad

En un largo primer estadio preteórico, existieron creencias y actitudes hacia el azar que dificultaron que éste se planteara como problema abordable por el ser humano. Durante muchos siglos se considera que el resultado de tirar un dado expresa la opinión de los dioses sobre futuros acontecimientos, nada es aleatorio. Sólo a partir del siglo XVI se da un intento de abordar el problema del azar desde la perspectiva de lo humanamente realizable, de la mano de Cardano, Galileo, Pascal y Fermat, entre otros.

El hecho de que las pruebas más antiguas de utilización de tabas para juegos de azar estén fechadas alrededor de 1800 años AC contrasta con el hecho de que hasta Gerolamo Cardano no se hiciera referencia alguna a la probabilidad (David, 1962). Y, sin embargo, una vez iniciada la teoría, sólo transcurrieron cien años entre el *Ars Conjectandi* (1713), de Jacob Bernoulli (1654-1705), y la *Teoríe Analytique des Probabilités* (1812), de Pierre Simon de Laplace (1749-1827). El primer texto contiene la primera formulación de la ley de los grandes números, mientras que la segunda obra es el primer intento de definir con rigor la noción de probabilidad (David, 1962), la que se conoce como definición clásica. Pero, como señalan Díaz y otros (1996), los resultados de este siglo de descubrimientos requirieron de varios miles de años de germinación. Así pues, aunque los juegos de azar existían desde mucho tiempo atrás, la teoría de la probabilidad, como una abstracción conceptual de las leyes del azar, no surgió hasta el siglo XVI, hecho sorprendente cuyo intento de explicación ha dado lugar a un buen número de teorías.

David (1962) apunta dos posibles explicaciones. Por una parte, la imperfección de los dados utilizados, que serían necesarios para empezar a concebir las leyes de la probabilidad. Y por otra, barreras de tipo religioso y moral. Cualquier intento de prever el resultado del lanzamiento de los dados podría ser interpretado como una pretensión de adivinar la intención de los dioses. Sin embargo, desde muy antiguo los hombres aprendieron a cargar los dados, lo cual hace pensar al menos en una oscura intuición no formulada de la idea de equiprobabilidad, lo que en términos fenomenológicos podríamos llamar «objeto mental juego equitativo».

Kendall (1978) rechaza las causas apuntadas por David y analiza otra razón que también ha sido propuesta: la ausencia de un álgebra combinatoria. Kendall cree que tampoco ésta puede ser causa de la lenta emergencia del concepto formal de *probabilidad*, puesto que no impidió los trabajos de Cardano y Galileo. Por ejemplo, Galileo enumeró las 216 maneras distintas con que pueden caer tres dados perfectos empleando sólo métodos aritméticos (Díaz et al., 1996, De Mora, 1989). Cardano carecía de una simbología adecuada y tenía que recurrir constantemente a ejemplos concretos, pero utilizaba (inconscientemente) los teoremas de la unión e intersección (De Mora, 1989). Más aún, Cardano demostró una extraordinaria perspicacia para los problemas fundamentales de la probabilidad. En su pequeño manual del jugador, *Liber de Ludo Aleae*, de 15 páginas, editado en 1663 (aunque escrito mucho antes), Cardano discute la equiprobabilidad, la esperanza matemática, el razonamiento de la media y las tablas de frecuencia para la probabilidad en el juego de los dados; hay incluso un esbozo de la ley de los grandes números, que sería formulada por Bernoulli mucho más tarde, en 1713 (Nagel, 1985).

Haking (1978) sugiere que la obsesión por el determinismo habría hecho imposible cualquier pensamiento de aleatoriedad. Kendall también se inclina a buscar una explicación al retraso en esta actitud básica hacia el mundo fenomenológico. Pero resulta que en la Europa del siglo XVIII se comenzaron a comprender los conceptos de aleatoriedad, azar, probabilidades, etc., precisamente en el momento en que cobraba auge la idea de que era posible prescindir de Dios a la hora de explicar el funcionamiento del mundo (Kline, 1980). La conceptualización del azar habría tenido lugar justo en el momento más desfavorable, cuando los modelos mecanicistas parecían ser capaces de explicar cualquier fenómeno.

Sin embargo, esta visión determinista del mundo puede ser coherente con el intento de conceptualizar el azar, si se adopta una posición según la cual las relaciones causa-efecto resultan tan complejas que la alternativa más adecuada para el estudio del fenómeno en cuestión sea un modelo no causal. Lo interesante de esta idea, además de que es capaz de reconciliar una visión obstinadamente determinista del mundo con el esfuerzo para conceptualizar el azar, es que la encontramos en el propio Laplace. Considerado su *Essai Philosophique sur les Probabilités* de 1814 como «el más perfecto exponente de la interpretación determinista del universo, un símbolo de aquella época que suponía que el pasado podría descubrirse y el futuro predecirse basándose en una simple instantánea del presente» (Newman, 1985), resulta que también Laplace es el autor del primer intento de definir con rigor matemático la noción de probabilidad (Díaz et al., 1996).

b) Formación de una teoría de la probabilidad

Apenas echados los cimientos de la teoría de la probabilidad, comenzaron sus aplicaciones a la construcción de tablas de mortalidad, rentas vitalicias, etc. De este modo, tras las aplicaciones de la probabilidad a los juegos de azar, se van perfilando nuevos objetivos de cara a prever el futuro de un fenómeno sobre la base de un conocimiento histórico del mismo. Como indican Borovcnik y otros (1991), el progreso conceptual comenzado por John Graunt en el siglo XVII consiste en enlazar las frecuencias relativas y las probabilidades, justificando de ese modo el uso de la probabilidad en contextos que van más allá de los juegos de azar. Como señala De Mora (1989), uno de los méritos de Graunt estriba en que se atreve por vez primera a medir fenómenos que eran privativos de la divinidad: el nacimiento, la enfermedad, la muerte. Se trata de una evidente novedad; sin embargo, este progreso no fue definitivamente establecido hasta que se dio a conocer en 1713 la ley de los grandes números, descubierta por Jacob Bernoulli tras veinte años de trabajo. Este teorema establecerá en qué sentido las frecuencias relativas de un suceso convergen hacia la pobabilidad del mismo.

En el siglo XVIII emerge el concepto de *distribución continua de probabilidad*. Abraham de Moivre (1667-1754), estudiando la desviación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad, halla la función de densidad que actualmente llamamos *normal* y deduce la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, lo que hoy se llama *teorema central del límite*. A partir de Thomas Simpson (1710-1761) se emplearán distribuciones continuas en diversos problemas; los trabajos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) estarán ya sumergidos en la teoría del error. El reverendo Thomas Bayes (1702-1761) desarrolla de forma completa la IV parte del *Ars Conjectandi* que Bernoulli dejó inacabada y obtiene su fórmula de la probabilidad inversa, conocida como teorema de Bayes, sobre cuyas premisas aún continúan las discusiones de orden lógico y filosófico.

Por otra parte, una vez sistematizada la teoría combinatoria por parte de Leibniz, se facilita el recuento de casos, lo cual será eje fundamental en la definición clásica de *probabilidad*. De hecho, en este momento se define por primera vez la probabilidad como número de casos favorables entre posibles, definición que será desarrollada por Laplace.

c) Búsqueda de una axiomatización de la probabilidad

Ya desde los trabajos de Gauss, Lobachevski y Bolyai sabemos que la geometría euclídea no es algo inherente al mundo físico. Prescindiendo de un axioma tan evidente como el de las paralelas, pueden construirse geometrías que describen las propiedades del espacio físico con tanta precisión como lo hace la propia geometría euclídea (Kline, 1980; Hernández, 1986). Pues bien, tampoco la probabilidad es una característica inherente a los objetos reales, algo que se pueda derivar de forma única, sino que es el resultado de nuestro esfuerzo para construir modelos con los que seamos capaces de formular predicciones en situaciones de incertidumbre. Es claro que cada una de estas situaciones puede exigir un modelo probabilístico construido expresamente para ella.

Así, desde el *Essai d'Aritmetique Morale,* de 1733, donde Buffon da el primer ejemplo de probabilidades geométricas (el famoso problema de la aguja de Buffon), pasando, como ya hemos visto, por los trabajos de De Moivre, Simpson y Gauss, sumergidos en el uso de las distribuciones continuas en diversos problemas, hasta el *Calcul des Probabilités,* donde Poincaré aborda también la solución de problemas de probabilidades geométricas, se están, de hecho, construyendo modelos probabilísticos que necesitan una concepción de la probabilidad mucho más general que la clásica. Por tanto, parece natural que el siguiente paso fuera la búsqueda de una axiomatización para la probabilidad, esto es, de una definición abstracta de la probabilidad. Y, en efecto, fue éste uno de los veintitrés famosos programas de investigación matemática que David Hilbert propuso durante el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en el año 1900.

Los trabajos en esta dirección han generado diversos puntos de vista acerca de la probabilidad, como ya hemos visto. Pero fue Andrey Nikolayevich Kolmogorov, en 1933, quien formuló en *Foundations of the Theory of Probability* un sistema de axiomas para la probabilidad, dentro del cual se derivan los teoremas usuales. En este punto de vista estructuralista, que fue adoptado de forma inmediata, los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida definida sobre esos conjuntos. Este desarrollo basado en la teoría de la medida proporcionó un fundamento lógico para el cálculo de probabilidades y lo conectó a la corriente principal de la matemática moderna de acuerdo con la cual el camino adecuado es considerar la matemática como una disciplina abstracta, simbólica y sin referencia a ninguna interpretación particular (Boyer, 1968; Kline, 1973).

Según lo expuesto en este apartado, nuestro análisis epistemológico e histórico de libros de texto consistirá en examinar las cuatro cuestiones que aparecen en la red de análisis del cuadro 1.

Cuadro 1
Red de análisis de aspectos epistemológicos de los libros de texto.

Cuestiones investigadas
1. En el capítulo introductorio se hace referencia a la problemática que se va a abordar
2. Se plantean situaciones problemáticas con objeto de hacer ver la necesidad de introducir los nuevos conceptos
3. Muestra diversas interpretaciones del significado de la probabilidad, abordando la problemática que genera cada uno de ellas
4. Se incluyen consideraciones históricas sobre el desarrollo del concepto de probabilidad

Por otra parte, deseábamos estudiar en qué medida los libros de texto de nuestra muestra tomaban en consideración los resultados de la investigación en didáctica de la probabilidad. Éste fue el aspecto didáctico de nuestro análisis, que complementa al epistemológico e histórico. Seguidamente mostraremos algunos de los resultados acerca de las dificultades de aprendizaje de la probabilidad que más frecuentemente aparecen en la bibliografía.

BREVE REVISIÓN DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD

Las investigaciones acerca de la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos relativos al azar y la probabilidad son muy numerosas, centrándose la mayoría de ellas en los niveles de enseñanza secundaria (Batanero, 2000). Estas investigaciones evidencian el uso de diversas estrategias no probabilísticas por parte de las personas cuando deben emitir algún juicio acerca de situaciones no deterministas. Tales estrategias son adquiridas a través de las experiencias de la vida cotidiana y proporcionan argumentos para tomar decisiones y enjuiciar, de modo que cuentan con un valor práctico para el individuo (Muñoz, 1998; Sáenz, 1998; Serrano et al., 1996, 1998; Guisasola y Barragués, 2002a, 2002b).

Las investigaciones que han estudiado con detalle estos mecanismos demuestran que los juicios probabilísticos que los individuos realizan están dirigidos por el uso sistemático de unos pocos patrones de inferencia o heurísticas (Kahneman y Tversky, 1972; Kahneman et al., 1982). Un marco teórico con el que analizar estos mecanismos decisorios, ampliamente utilizado en la bibliografía especializada, se conoce como paradigma de heurísticos y sesgos. Seguidamente explicaremos en qué consisten algunos de los patrones que más frecuentemente han sido observados en los estudiantes, pero no sin antes hacer notar que, dentro del marco general fenomenológico que hemos adoptado, nos proponemos ahora tomar en consideración tanto los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos como los que se proponen en las secuencias de enseñanza. Así pues, estamos realizando una fenomenología didáctica.

Heurística de accesibilidad

Consiste en estimar la probabilidad de un suceso por la facilidad con que se recuerdan ejemplos en los que dicho suceso ocurrió o por la facilidad con que pueden generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre (Sáenz, 1998; Scholz, 1991).

Heurística de representatividad

Sugiere estimar la probabilidad de un suceso de acuerdo con lo representativo de cierta población que parece ser dicho suceso. Esto es, se asigna una alta probabilidad a aquellos sucesos que parecen ser típicos de una población y baja probabilidad a los que parecen no serlo (Schoenfeld, 1987; Sáez, 1998; Serrano et al., 1996).

Diversas concepciones erróneas surgen comúnmente de la heurística de representatividad. Dos de las más frecuentes son la llamada *insensibilidad al tamaño de la muestra* y diversas ideas erróneas acerca del modo en que deben configurarse las secuencias aleatorias. La *insensibilidad hacia el tamaño de la muestra* conduce a pensar que cualquier muestra tomada de una población debe reproducir todas las características de dicha población, aunque se trate de una muestra de pequeño tamaño (Serrano et al.,1998; Schoenfeld, 1987). En cuanto a las ideas erróneas acerca de secuencias aleatorias, se refieren a la creencia de que las secuencias de resultados que aparecen relativamente ordenadas o simétricas no pueden considerase aleatorias por no tener aspecto aleatorio (Muñoz, 1998; Green, 1982; Borovcnik y Bentz, 1991).

Sesgo de equiprobabilidad

Se refiere a la creencia por parte de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquéllos en que no es aplicable el principio de la indiferencia (Lecoutre, 1985, 1992; Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre y Cordier, 1990).

Enfoque del resultado aislado

Consiste en interpretar el valor de la probabilidad de un suceso como la formulación de una predicción acerca de si tal suceso ocurrirá o no la próxima vez que se repita el experimento. Se tiende a buscar explicaciones causales a la variabilidad de las variables aleatorias (ver el siguiente apartado) y a considerar que cada una de las repeticiones de un experimento aleatorio no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores. En consecuencia, podrían existir dificultades para comprender el enfoque frecuencial de la probabilidad (Konold, 1991; Serrano et al., 1998).

Concepción determinista del azar

Se refiere a la búsqueda de explicaciones causales al azar. Los sujetos emplean esquemas causales ingenuos como mecanismos de enjuiciamiento en situaciones en las que interviene el azar. Así pues, no se aprecia el carácter aleatorio, bajo las hipótesis establecidas, de las variables que intervienen en el fenómeno (Borovcnik y Bentz, 1991; Borovcnik y Peard, 1996). Como indica Sáenz (1998), el sistema educativo tradicionalmente entrena el pensamiento causal, introduciendo desde los primeros años de escolarización una visión determinista del mundo (física newtoniana, variables funcionalmente ligadas por una relación determinista...) en forma de leyes de «obligado cumplimiento». De hecho, el cálculo infinitesimal, muy presente en los programas, no es sino la herramienta matemática para tratar la complejidad del cambio y de la causalidad determinista (Gil y De Guzmán, 1993).

A nuestro entender, la interpretación determinista del azar es una posible dificultad de los alumnos a tomar muy en consideración. Recordemos que la misma actitud básica hacia el mundo fenomenológico puede explicar en buena medida la tardía conceptualización de la probabilidad, como ya indicamos en nuestras consideraciones históricas. Quizá buscar una explicación causal convincente a todo fenómeno observable sea un mecanismo inherentemente humano, largamente heredado, que surge para tratar de reducir o suprimir la incertidumbre en un entorno donde tan sujetos estamos a las contingencias de lo impredecible y donde tan codiciada resulta la capacidad de pronosticar certeramente. Sea cual fuere el origen de este mecanismo, existen evidencias suficientes de que puede dificultar el desarrollo del pensamiento científico sobre el azar y de que puede ser todavía reforzado por un sistema educativo que entrene en mayor medida el pensamiento causal y enseñe la probabilidad incorrecta y tardíamente. Parece razonable pensar que, como profesores, uno de nuestros objetivos debe ser mostrar a los alumnos que la ciencia se reconoce incapaz de explicar el mundo sólo en términos de necesidad, que el azar juega un importante papel, que el estudio del azar se encuentra razonablemente dentro de las posibilidades de la ciencia, y que en muchas ocasiones nuestra única herramienta de análisis científico será precisamente la probabilidad formal, con la que investigar las posibles conexiones estadísticas entre las diversas variables del fenómeno bajo estudio.

Como ya hemos indicado, las intuiciones de sentido común pueden entrar en conflicto con las concepciones formales acerca del azar y la probabilidad. Por ejemplo, desde el punto de vista del aprendizaje de la concepción frecuencial de la probabilidad, una *insensibilidad al tamaño de la muestra* puede hacer que los alumnos no tomen en consideración la importancia del número de ensayos en sus estimaciones frecuenciales de la probabilidad. Estos mecanismos de enjuiciamiento alternativos a los formales constituyen dificultades que pueden impedir o sesgar la aplicación de los últimos. Además, las investigaciones muestran de forma repetida la escasa efectividad que puede tener una enseñanza de tipo convencional para que los alumnos superen sus dificultades y logren un aprendizaje significativo. Se viene demostrando que la instrucción convencional puede no producir ningún cambio conceptual, independientemente del nivel educativo, y se apunta la necesidad, como indica Shaughnessy (1992), de conocer más acerca de qué piensan los estudiantes sobre el azar y la probabilidad y de identificar métodos efectivos de instrucción que tomen en consideración sus ideas y sus dificultades.

Según lo apuntado, nuestro análisis de libros de texto ha incluido también criterios de tipo didáctico. En concreto, como puede verse en la red de análisis del cuadro 2, hemos estudiando si en el texto se toma en consideración la investigación en didáctica de la probabilidad, que conlleva tener en cuenta las ideas previas de los estudiantes sobre los conceptos y plantear actividades expresamente dirigidas a ayudarles a superar sus dificultades.

Cuadro 2

Red de análisis de aspectos didácticos de los libros de texto.

Cuestiones investigadas
5. Se tienen en consideración (a través de algún comentario de tipo declarativo) las ideas de los estudiantes acerca de los conceptos
6. Se consideran o al menos se sugieren estrategias para superar las dificultades de los estudiantes

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el estudio hemos seleccionado 34 libros de texto de nivel universitario de entre la amplia bibliografía existente sobre teoría de la probabilidad y estadística. La relación de libros analizados se presenta en el anexo. La selección se ha realizado atendiendo a dos criterios. En primer lugar entrevistamos a un grupo de profesores de diferentes escuelas de ingeniería de la Universidad del País Vasco, con gran experiencia docente en la asignatura Métodos estadísticos para la ingeniería, y tomamos aquellos textos que recomendaban a sus alumnos como bibliografía básica. Después, añadimos algunos otros libros de texto disponibles en las bibliotecas de los centros que, con mayor frecuencia, eran consultados por los alumnos.

A continuación, las secuenciaciones propuestas por los libros de texto fueron analizadas empleando los criterios seleccionados en nuestro análisis de aspectos epistemológico e histórico (Cuadro 1) y didáctico (Cuadro 2).

Seguidamente fueron realizadas varias lecturas minuciosas de los correspondientes capítulos por parte de los autores de la investigación, valorando en cada texto cada uno de los apartados, especificando si a juicio de cada investigador se discute la cuestión con detalle suficiente, si contiene alguna referencia a la cuestión pero insuficientemente detallada o si no aparece ninguna referencia de interés hacia la misma. Las discrepancias se resolvieron discutiendo hasta llegar a una posición compartida, y debe indicarse que existió un alto grado de acuerdo entre los investigadores.

RESULTADOS

La tabla 1 muestra los resultados del análisis de cada uno de los libros de texto y el modo de interpretarlos. Como puede verse en la leyenda, la categoría D indica que, a nuestro entender, en el texto se discute la cuestión con detalle suficiente; R indica que nos parece insuficientemente detallada la referencia que aparece; y N significa que el texto no contiene ninguna referencia de interés hacia la cuestión. Ahora bien, esta categorización no es valorativa. Por ejemplo, cuando asignamos D a un texto sobre una cuestión determinada, sólo queremos decir que a nuestro entender el texto muestra preocupación suficiente hacia la misma, y sin embargo quizá nos parezca inadecuado el modo que utiliza para tratar la cuestión. En la discusión de los seis apartados que sigue explicamos por qué nos parece adecuado o inadecuado el tratamiento utilizado por algunos de los textos.

Tampoco es nuestra intención seleccionar «el texto más adecuado». Si en la primera parte del trabajo establecemos un fundamento epistemológico, histórico y didáctico con el que analizar una determinada forma de presentar la teoría de la probabilidad, ahora discutiremos ejemplos concretos de presentación. Nuestro ánimo es que las ideas que desarrollamos ayuden al profesor a seleccionar «sus textos más adecuados».

1. Justificación de la necesidad de la teoría de la probabilidad

Hemos estudiado si los textos analizados explicaban la problemática general de la que se ocupa la teoría de la probabilidad para hacer ver al alumno la necesidad de este marco teórico. Hemos encontrado en 27 de los textos analizados esta explicación con detalle suficiente, normalmente en su introducción. Pero algunos de ellos, a pesar de mostrar preocupación por esta cuestión, utilizan un enfoque que entendemos deficiente. En 8 de estas explicaciones, que representan cerca de la cuarta parte de la muestra de textos, aparece una clasificación de los fenómenos naturales en «fenómenos deterministas» y «fenómenos aleatorios». Los primeros estarían determinados de forma única por una colección de factores conocidos, mientras que para los segundos no se dispone de tal ley determinista. Esta clasificación se ilustra en dichos textos con ejemplos como «el lanzamiento de una moneda» (fenómeno aleatorio) y el «tiempo que transcurre desde que se lanza un objeto hasta que llega al suelo» (fenómeno determinista). De ese modo, parecen mostrar al alumno que los fenómenos reales son intrínsecamente aleatorios o intrínsecamente deterministas y que en muy pocas ecuaciones pueden describir completamente algún fenómeno natural. En realidad, no son los fenómenos reales sino los modelos matemáticos, que se construyen bajo cierto conjunto de hipótesis, los que se clasifican de ese modo. Esta necesaria precisión aparece, por ejemplo, en los textos [28] (pp. 1-4) o [7] (pp. 1-4), cuando hablan de los múltiples factores que intervienen en los procesos físicos reales.

Además, esta clasificación fenómeno aleatorio/determinista, presentada sin una discusión detallada, parece sugerir que las descripciones probabilísticas de los fenómenos son soluciones de segundo nivel que se emplean a la espera de soluciones deterministas capaces de describir unívocamente el fenómeno observado. Sin embargo, ya hemos visto que, aunque el azar pueda relacionarse con la ignorancia acerca del fenómeno, ambos no son sinónimos; el estudio del azar no es una simple aceptación de la incapacidad de nuestros conocimientos. Esta postura queda puntualizada muy claramente en el texto [21], cuando sostiene que el principio fundamental consiste en que al estudiar el comportamiento de las poblaciones resulta innecesario tomar en consideración las propiedades de cada uno de sus elementos, y surgen nuevas regularidades que son de un género diferente. He aquí el fragmento de este texto donde se discute la cuestión.

Ejemplo 1, texto [21] (p. 12)

El nivel insuficiente de nuestros conocimientos [...] no debe disminuir la eficacia de su aplicación. Los métodos de la teoría de las probabilidades satisfacen al máximo estos requisitos. Para que no se entienda de modo equivocado lo que acabamos de exponer, vamos a recalcar una vez más la circunstancia siguiente. Diciendo que el formalismo de la teoría de las probabilidades es el más adecuado para estudiar fenómenos moleculares [las regularidades que se observan en el movimiento de un gran número de moléculas es el ejemplo que está utilizando], no afirmamos, ni mucho menos, que las premisas filosóficas de la aplicación de esta teoría a las ciencias naturales se derivan del nivel «insuficiente» de nuestros conocimientos. El principio fundamental consiste en que cuando se estudian fenómenos **en masa** surgen nuevas regularidades sui géneris. [...] Cuando se estudia un fenómeno natural hay que hacer la abstracción de los detalles no esenciales; si se consideraran todos los detalles y relaciones existentes, incluyendo las que no son esenciales para el fenómeno dado, su estudio se complica.

Tabla 1
Resultados del análisis de libros de texto.

Relación de textos analizados		Cuestiones					
Textos recomendados por los profesores		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Canavos (1992)	D	N	R	N	N	N
2	Cilleruelo y Aurtenetxe (1997)	D	N	D	R	N	N
3	Egusquiza (1998)	D	N	N	N	N	N
4	López (1990)	D	N	D	N	N	N
5	Mendenhall et al. (1986)	D	N	D	N	N	N
6	Mendenhall y Sincich (1997)	D	D	R	N	N	N
7	Miller y Freund (1995)	D	N	N	R	N	N
8	Quesada (1994)	D	N	N	N	N	N
9	Spiegel (1997)	N	N	R	N	N	N
10	Viedma (1990)	N	N	R	N	N	N
11	Walpole y Myers (1992)	R	N	N	N	N	N
Textos adicionales consultados por los alumnos							
12	Álvarez (2000)	D	N	R	N	N	N
13	Bajpai, Calus y Fairley (1981)	D	D	R	R	R	N
14	Benjamin (1981)	D	N	D	N	N	N
15	Castillo (1993)	D	N	D	N	N	N
16	De Groot (1988)	R	N	D	R	N	N
17	Devore (1988)	R	N	D	N	N	N
18	Feller (1983)	D	D	D	R	R	N
19	Fernández de Troconiz (1993)	D	N	D	N	N	N
20	Gmurman (1983)	D	N	R	R	N	N
21	Gnedenko (1995)	D	D	D	D	N	N
22	Hérault (1973)	D	N	R	N	N	N
23	Kalbfleisch (1984)	R	N	R	N	N	N
24	Kreyszig (1991)	R	N	R	N	N	N
25	Lippman (1976)	D	N	R	N	R	N
26	Lipschutz y Schiller (2000)	D	N	D	N	N	N
27	Martín y Ruiz-Maya (1995)	D	D	D	D	N	N
28	Meyer (1992)	D	D	D	N	N	N
29	Mode (1970)	D	N	N	R	N	N
30	Montgomery y Runger (1996)	D	N	R	N	N	N
31	Obregón (1975)	D	N	D	N	N	N
32	Peña (1994)	D	N	D	D	R	N
33	Ríos (1970)	D	N	R	N	R	N
34	Viles (2001)	D	N	D	R	N	N
Aspectos analizados		**Leyenda de la valoración**					
1) Referencia a la problemática general que será tratada. **2)** Uso de situaciones problemáticas para introducir los nuevos conceptos. **3)** Discusión de la problemática de los diversos enfoques de la probabilidad. **4)** Incluye consideraciones históricas. **5)** Considera las ideas previas de los estudiantes. **6)** Considera o sugiere estrategias para superar las dificultades de los estudiantes.		**D:** Discute la cuestión con detalle suficiente. **R:** Contiene alguna referencia a la cuestión, pero insuficientemente detallada. **N:** No aparece ninguna referencia de interés hacia la cuestión.					

Los 8 textos en los que ha sido observada esta confusa clasificación de los fenómenos naturales, que representan cerca de la cuarta parte de la muestra, son los siguientes: [1], [2], [3], [4], [8], [12], [20] y [27]. A continuación reproducimos dos fragmentos de ejemplos tomados de sendos textos:

Ejemplo 2, texto [1] (p. 28)

La probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse sucesos aleatorios, cuando éstos se comparan con los fenómenos determinísticos. Por ejemplo, nadie espera predecir con certidumbre el resultado de un experimento tan simple como es el lanzamiento de una moneda. Sin embargo, cualquier estudiante de primer año de licenciatura en física debe ser capaz de calcular el tiempo que transcurrirá para que un objeto, que se deja caer desde una altura conocida, llegue al suelo.

Ejemplo 3, texto [3] (p. 14)

Un fenómeno determinista es una situación en la que las condiciones o causas determinan perfectamente los resultados o efectos. Por ejemplo, la caída libre de un cuerpo. Un fenómeno aleatorio es una situación en la que las mismas condiciones o causas pueden dar lugar a diferentes resultados o efectos. El lanzamiento de un dado es un ejemplo de fenómeno aleatorio o de azar.

2. Uso de situaciones problemáticas para introducir los conceptos

Adoptando la concepción de problema a la que nos hemos referido en anteriores apartados, hemos encontrado que solamente en 6 de los 34 textos se muestran auténticas situaciones problemáticas que justifican la introducción de conceptos. En el resto, generalmente se listan las definiciones de los conceptos en su versión terminal, sin discusión previa acerca de por qué son necesarios, o a lo más se expone un ejemplo previo sencillo y luego se formula la definición formal, pero sin que se perciba una verdadera situación problemática que haga necesario el nuevo concepto.

Por ejemplo, los textos [4] (p. 211) y [10] (p. 6) introducen el concepto de *probabilidad condicional* como un simple cociente de probabilidades; el texto [8] (p. 139) define la independencia entre los sucesos A y B como sucesos tales que p(A/B) = p(A), y el texto [10] (p. 4) se refiere a la interpretación frecuencial de la probabilidad como el límite de una sucesión de frecuencias relativas y a la definición clásica suponiendo que «las frecuencias relativas de los sucesos simples son iguales». He aquí un fragmento tomado de uno de estos textos:

Ejemplo 4, texto [8] (p. 139)

Dados dos sucesos A, B∈Q, diremos que son independientes si p(B/A) = p(B), es decir,

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B),\ p(A \cap B) = p(A)\ p(B)$$

Expresión esta última que se toma como definición de independencia.

Sin embargo, las investigaciones sobre la comprensión del modo en que converge la frecuencia relativa de un suceso y de los conceptos de *probabilidad condicionada, independencia y equiprobabilidad* muestran las dificultades de los estudiantes para comprenderlos de forma significativa y la ineficacia a este respecto de presentar las simples definiciones formales, como aparece en los citados textos (Falk, 1983; Borovcnik et al., 1991; Guisasola y Barragués, 2002a, 2002b; Barragués, 2002).

En cambio, en los textos [6] (p. 98) y [21] (p. 58), el concepto de *probabilidad condicionada* surge del problema de calcular la probabilidad de un suceso a la luz de una nueva información. También el texto [28] (pp. 28-30) discute con gran detalle el concepto de *equiprobabilidad*, tras lo cual tiene sentido la regla de Laplace y además justifica la necesidad del cálculo combinatorio. El siguiente fragmento de este último texto recoge algunos aspectos de la discusión. Nótese cómo el autor insiste en que debe justificarse la hipótesis de equiprobabilidad para aplicar la regla de Laplace y el escaso alcance práctico de esta regla en situaciones reales.

Ejemplo 5, texto [28] (p. 28)

La suposición que más comúnmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. De ninguna manera esta suposición puede darse como un hecho; debe justificarse con cuidado. Hay muchos experimentos para los cuales se garantiza tal suposición, pero también hay muchas situaciones experimentales en las cuales sería un error hacer tal suposición. [No lo transcribiremos, pero a continuación muestra un ejemplo en el que no es factible la equiprobabilidad y luego deduce la regla de Laplace]. Es importante comprender que la expresión anterior de p(A) [se refiere a la regla de Laplace] es sólo consecuencia de la suposición de que todos los resultados son igualmente probables y sólo es aplicable cuando se satisface esta suposición. Sin duda no sirve como una definición general de probabilidad.

El libro [21] constituye un ejemplo notable de preocupación por mostrar la naturaleza problemática del conocimiento probabilístico, con la necesidad de una axiomática y con la potencia de la teoría de la probabilidad para construir modelos. Por su interés, citaremos a continuación algunas de las referencias que incorpora:

Ejemplo 6, texto [21]

1) Explica las implicaciones de la regularidad estadística en física, ciencia militar, economía y otras disciplinas técnicas (introducción, pp. 20, 64, 69, 71).
2) Liga desarrollo de la teoría de las probabilidades a la demanda práctica y se hace eco de las palabras de Chebyshev, fundador de la escuela rusa de la teoría de las probabilidades: «La aproximación entre la teoría y la práctica asegura los resultados más favorables […] las ciencias se desarrollan bajo el influjo de la práctica que descubre nuevos objetos a investigar. Si la teoría gana mucho aplicando un método viejo o sus modificaciones, gana más creando métodos nuevos, y en este caso la ciencia cuenta con un guía certero en su quehacer» (introducción).
3) Discute acerca de la causalidad, del propio concepto de aleatoriedad, haciéndolo relativo a un determinado conjunto de condiciones (pp. 15-18).
4) Se preocupa por mostrar el problema filosófico de la existencia de la probabilidad como un valor objetivo e independiente del individuo (pp. 17-21).

5) Hace referencias históricas hacia los estudios demográficos como origen de la probabilidad frecuencial. Hace referencias históricas al material experimental que corrobora la existencia de regularidad estadística, p.e. los datos de lanzamientos de monedas realizados por Buffon y Pearson (pp. 45-47).
6) Justifica la necesidad de una axiomática. Se refiere a la importancia de la axiomática por la necesidad de estudiar de forma sistemática las propiedades fundamentales de la teoría de la probabilidad, porque la falta de una formulación precisa a veces era motivo de conclusiones paradójicas. Además «muchas veces se aplicaban concepciones probabilísticas ingenuas a diversas ramas de las ciencias». Se trata de una referencia a la existencia de concepciones alternativas a las formales, «empleadas por algunos investigadores que aplican la probabilidad». Desgraciadamente se trata de la única referencia que contiene el texto a esta importante cuestión (p. 51).
7) Discute el significado de un marco axiomático en cualquier rama de las matemáticas: se trata de una construcción encaminada a soportar la teoría; sin embargo, «el enunciado de axiomas no es la fase inicial de la construcción de la teoría, sino que es el resultado de una acumulación, durante largo tiempo, de diversos hechos» (p. 51). Cabe recordar que la axiomática de Kolmogorov está sugerida por las propiedades fundamentales de la probabilidad que se observan al estudiar la concepción frecuencial. De hecho, el propio Kolmogorov, padre de la formulación abstracta de la probabilidad, es partidario de una interpretación frecuencial. Así, en el capítulo dedicado a la probabilidad de Alexandrov et al. (1994), Kolmogorov insiste en esta interpretación, discute diversos problemas de interés y utiliza la ley de los grandes números para formalizar la intuición de «proximidad entre la probabilidad y la frecuencia relativa».

3. Diversas interpretaciones del concepto de *probabilidad* y su problemática

Menos de la mitad de los textos contiene una referencia suficientemente detallada hacia las diferentes concepciones de la probabilidad y la problemática que generan. En 5 de los 34 textos no se discuten las diversas interpretaciones y en 13 se mencionan muy superficialmente. Por ejemplo, el texto [1] (pp. 29-32) expone brevemente las interpretaciones clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática de la probabilidad, pero las tres aparecen como no relacionadas; no discute la problemática que encierra cada una de ellas ni justifica la axiomática: se refiere simplemente a que «se va a formalizar el concepto de probabilidad mediante un conjunto de axiomas». El texto [10] (p. 3) tampoco aborda la problemática de la concepción frecuencial. Define p(A) como el límite de la sucesión de frecuencias relativas, pero no alude a la ambigüedad del término *un amplio número de pruebas*. Por otra parte, los axiomas aparecen como arbitrarios, no se han discutido previamente las propiedades de la frecuencia relativa, que son las que pueden sugerir los axiomas. Los siguientes fragmentos han sido tomados de dicho texto:

Ejemplo 7, texto [10] (p. 3)

Sea n el número de pruebas efectuadas en un experimento aleatorio E y f(A) en número de ellas en las que se cumplió en suceso A. Según Richard von Mises, la probabilidad de A, que representaremos por p(A), se define por:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(A)}{n}$$

De acuerdo con esta definición, para obtener la probabilidad de un suceso es necesario efectuar un gran número de pruebas del experimento aleatorio y obtener empíricamente el número hacia el cual se aproximan las frecuencias relativas del suceso al aumentar en número de pruebas. [...] La probabilidad también se puede establecer a partir de una función real p(A) definida sobre los sucesos A del universo de un experimento aleatorio. La función p(A) hace corresponder a cada subconjunto A de S un número real tal que cumpla ciertas propiedades llamadas axiomas de la probabilidad.

El texto [9] (p. 129) muestra escaso interés hacia la problemática que generan los enfoques clásico y frecuencial. Se limita a citar que el origen de las dificultades se encuentra en la vaguedad del término *misma oportunidad* (enfoque clásico) y en la posible no-existencia del límite de las frecuencias relativas (enfoque frecuencial) y que ello ha llevado a la probabilidad a su orientación axiomática. El siguiente fragmento ha sido tomado de dicho texto, y recoge prácticamente toda la discusión:

Ejemplo 8, texto [9] (p. 129)

La definición clásica de probabilidad tiene la pega de que las palabras *misma oportunidad* aparecen como sinónimas de *equiprobables*, lo cual produce un círculo vicioso. Por ello, algunos defienden una definición estadística de la probabilidad. Para ellos, la probabilidad estimada, o probabilidad empírica, de un suceso se toma como la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso cuando el número de observaciones es muy grande. La probabilidad misma es el límite de esa frecuencia relativa cuando el número de observaciones crece indefinidamente. [...] La definición estadística, si bien útil en la práctica, tiene la desventaja matemática en el hecho de que un límite puede no existir.

El texto [7] se centra en la versión axiomática de la probabilidad y se refiere a la interpretación frecuencial y a la regla de Laplace como formas particulares de construir funciones de probabilidad que satisfagan la axiomática, pero no hay referencias a la problemática que generan.

El siguiente fragmento ha sido tomado de dicho texto:

Ejemplo 9, texto [7] (p. 15)

[...] Las tres propiedades anotadas son axiomas de la teoría de probabilidades y no requieren demostración. Sin embargo, si esta teoría se aplica al mundo físico, podemos ver que estos axiomas corresponden a hechos reales, es decir, veremos que nos dan resultados razonables. Con este objeto diremos algunas palabras de la interpretación frecuencial de la probabilidad. De acuerdo con esta interpretación generalmente aceptada, consideraremos una probabilidad como una proporción o frecuencia relativa, a partir de un gran número de casos.

Sin embargo, el texto [2] explica que no existe una interpretación científica única, y que las diversas interpretaciones han sido defendidas por unos y criticadas por otros, lo cual da una cierta idea de controversia a la hora de interpretar la probabilidad. Discute las problemáticas de la interpretación clásica (incluida su circularidad), de la frecuencial (incluyendo la ambigüedad de lo que debe significar *muestra grande*) y de la subjetiva, refiriéndose a los problemas derivados de que dos personas sensatas, en las mismas condiciones, decidan asignar diferentes probabilidades a un suceso. Finalmente la axiomática actúa como teoría integradora de las diferentes interpretaciones. El texto [15] (p. 69) nos parece interesante en este apartado porque, aunque su punto de partida para exponer la teoría probabilística es la axiomática, luego aborda el problema de asignar probabilidades, es decir, de elegir funciones de probabilidad adecuadas. Explica que existen muchas funciones de probabilidad válidas desde el punto de vista de la axiomática para el mismo espacio muestral, habla de las dificultades de la asignación clásica (en su formulación clásica no es válida para infinitos resultados posibles y la asignación de equiprobabilidad *a priori* puede no estar justificada), se refiere a la asignación de probabilidades a partir de las frecuencias relativas, pero añade que en muchos casos no es posible la experimentación, lo que da paso a la asignación subjetiva, donde entra en el problema de que varios expertos puedan asignar valores diferentes de probabilidad.

4. Se incluyen consideraciones históricas sobre el desarrollo del concepto de *probabilidad*

La referencia histórica hacia el desarrollo del concepto de *probabilidad* es un aspecto muy descuidado en los textos. Sólo en tres de ellos se ha encontrado una referencia detallada. En el resto de los textos no se observan referencias o bien aparecen pequeñas citas como en los textos [1] (p. 29) y [9] (prólogo), que asocian los juegos de azar al desarrollo inicial de la probabilidad. En la introducción del texto [7] (p. 1) aparece una pequeña referencia histórica que refleja la importante cuestión del cambio en el ámbito de aplicación de la teoría, al pasar de los juegos de azar a las descripciones gráficas y numéricas de masas de datos. Sin embargo, la referencia es imprecisa. Una excepción es el texto [21], en el que aparecen múltiples referencias históricas que hablan de la problemática que hubo que superarse en cada momento. Por ejemplo, se refiere a la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre los problemas de los jugadores, los problemas en demografía y de los seguros (p. 9). También explica con detalle las referencias históricas hacia los registros de datos sobre poblaciones que dieron lugar a los cálculos sobre fenómenos demográficos (pp. 44-48).

5-6. Ideas previas y dificultades de aprendizaje de los alumnos

En ninguno de los textos analizados aparecen referencias suficientes hacia el uso de concepciones probabilísticas alternativas a las formales (Cuestión 5). Y sin embargo, algunos plantean ejercicios que tocan auténticas fuentes de dificultades de aprendizaje que podrían explotarse didácticamente. Por ejemplo, en el libro [7] aparece una observación relacionada con la concepción que se ha denominado *insensibilidad al tamaño de la muestra*, cuando explica el significado de p(cara) = 0,5:

Ejemplo 10, texto [7] (p. 16)

Haciendo un gran número de tiradas, la mitad de las veces saldrá cara y la otra mitad cruz, sin embargo esto no significa que necesariamente obtengamos 10 caras y 10 cruces al tirar 20 veces.

No obstante, la referencia es insuficiente y además «explicativa», no propone actividades que muestren la gran variabilidad de las frecuencias relativas en pequeñas muestras para demostrar la afirmación que realiza. El libro [21] (p. 51) también contiene alguna referencia hacia el uso de concepciones probabilísticas ingenuas a fin de resolver problemas en los que interviene el azar, pero no entra en detalles acerca de tales concepciones ni incluye actividades destinadas a superarlas, de modo que supone implícitamente que una exposición rigurosa de la teoría será suficiente para sustituirlas por ideas formales. En el texto [24] (p. 73) también aparecen ejercicios cuyo valor no se explota. Los problemas 9 y 10 reproducen la situación conocida como «urna de Falk» (1983), que resulta muy eficaz a la hora que deja al descubierto la gran dificultad de los alumnos para distinguir entre independencia causal y probabilística (el ejemplo número 12 discute un enunciado típico de esta situación).

Hay, no obstante, 5 textos en los que hemos encontrado alguna preocupación hacia los juicios e intuiciones probabilísticas erróneas. Se trata de los textos [13], [18], [25], [32] y [33]. Por ejemplo, el texto [18] (pp. 21-23, 137) se refiere a los juicios probabilísticos y al modo en que aparece en el lenguaje común el azar, pero añade que no se ocupará de ese tipo de razonamiento. He aquí un fragmento del texto:

Ejemplo 11, texto [18] (pp. 21-22)

Por el éxito de la teoría moderna de probabilidades se ha pagado un precio: la teoría se confina a un aspecto particular del «azar». La noción intuitiva de probabilidad se relaciona con el razonamiento inductivo y con juicios como el de: «Pablo es probablemente un hombre feliz», «este libro será probablemente un fracaso», «la conjetura de Fermat es probablemente falsa». [...] De todas maneras debe entenderse que no nos ocuparemos de las formas de razonamiento intuitivo, sino de algo que se puede llamar probabilidad física o estadística.

En el texto, seguidamente explica que esta probabilidad intuitiva es insuficiente para fines científicos, pero que su existencia es un hecho histórico. La cuestión de la independencia estocástica también es tratada en el texto con relación a las sugerencias de la intuición, y añade que a veces la independencia sólo puede verificarse mediante cálculos. También se refiere a que la importancia real para un ingeniero puede ser una *predicción para una máquina específica*, no para una población infinita. Ya nos hemos referido a esta interpretación de la probabilidad como un pronóstico hacia el resultado de la próxima ejecución del experimento (enfoque del resultado aislado) como fuente de dificultades de aprendizaje.

Por su parte, el libro [32] en alguna ocasión se refiere a la falta de intuición de los estudiantes acerca del azar. Estudia la situación en la que se dispone de dos urnas que contienen bolas blancas (B) y negras (N), U1(7B, 3N), U2(3B, 7N), de una de las cuales se extraen con reemplazamiento diez bolas que han resultado ser BNBBBNBBBB. La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de que la bola provenga de U1? El autor realiza los cálculos, comprobando que la probabilidad pedida es 0,994, de modo que existe una alta confianza en que la muestra proviene de U1. A continuación observa lo siguiente:

Ejemplo 12, texto [32] (p. 111)

Al presentar este problema a un grupo de 100 estudiantes y pedirles que estimasen la probabilidad pedida, se obtuvo el siguiente resultado: el 2% estimó un valor entre 0,5 y 0,6; el 20% entre 0,6 y 0,7; el 60% entre 0,7 y 0,8; el 15% entre 0,8 y 0,9, y el 3% entre 0,9 y 0,95. Ninguna persona supuso un valor mayor que 0,95. Este ejemplo muestra una frecuente falta de intuición ante la incertidumbre, que tiene consecuencias negativas, ya que despreciamos la información obtenida en la experimentación. (Aplíquese a un médico que decide en base a una prueba B entre dos enfermedades U1 y U2, a un ingeniero que trata de distinguir entre dos causas de averías U1 y U2 dados los resultados B, a un científico que selecciona entre dos teorías o hipótesis científicas (U1 y U2) ante un cuerpo de evidencia científica).

Así pues, todos los estudiantes a los que el autor pidió estimar la probabilidad percibieron que la probabilidad era menor que la real. Se trata de un interesante problema que podría explotarse didácticamente: ¿cómo es posible que la probabilidad de U1 resulte modificada, si la elección de urna se realiza *antes* de la extracción de las bolas? (confusión entre independencia causal y probabilística). Referencias parecidas se encuentran en los otros 3 textos, [13], [25] y [33]. Pero ninguno de los 5 textos propone actividades expresamente dirigidas a superar las dificultades (Cuestión 6), puesto que sólo se refieren muy superficialmente a algunas posibles intuiciones erróneas y, en este sentido, no aprecian el obstáculo real que suponen, para superar el cual no es suficiente una simple descripción de las mismas.

CONCLUSIONES DEL TRABAJO

En la gran mayoría de los textos analizados la introducción de los conceptos de la teoría elemental de la probabilidad adolece de una presentación aproblemática. Los conceptos se introducen en general atendiendo exclusivamente a la estructura lógica de la materia, sin mencionar la problemática de la que surgen y a la que intentan dar una solución.

Cuando se trata de mencionar las diferentes formas de entender la probabilidad, menos de la mitad de los textos contiene una referencia suficientemente detallada hacia este aspecto. En el resto, las diferentes interpretaciones se muestran no relacionadas, no se discute la problemática que generan, la axiomática no se justifica y los axiomas resultan arbitrarios. Generalmente los libros de texto sólo mencionan las teorías como construcciones acabadas y en su aspecto actual. No se mencionan, o se hace de forma insuficiente, datos sobre el proceso de construcción de la teoría, ni las relaciones entre las diferentes interpretaciones de la probabilidad, mostrando así una visión acumulativa y lineal de las matemáticas que no tiene en cuenta las problemáticas y las revisiones de los conceptos ni los progresos conceptuales que se sucedieron.

El desarrollo histórico del concepto de *probabilidad* es tomado en consideración por muy pocos textos. Por término general, la referencia histórica, cuando existe, se limita a citar una curiosidad o anécdota. Asimismo, la gran mayoría de los libros de texto se interesa fundamentalmente por los aspectos cuantitativos y obtiene ecuaciones que luego aplican en ejemplos que admiten una única solución, y además ésta se obtiene directamente de forma operativa. Se echan en falta importantes aspectos procedimentales a los que hemos hecho referencia, como pueden ser el tratamiento cualitativo de las situaciones, la emisión de hipótesis o la experimentación con una diversidad de modelos.

Finalmente, ningún libro de texto presta atención significativa a los resultados de la investigación didáctica sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos y procedimientos de la teoría de la probabilidad. A pesar de constituir importantes obstáculos para el aprendizaje, las posibles ideas previas, las concepciones alternativas y las dificultades de los estudiantes no son tomadas en consideración. Si a todos estos obstáculos añadimos los efectos de una enseñanza basada en la exposición aproblemática del cuerpo teórico actual, que presenta los conceptos únicamente en su forma operativa final, se pueden entender las dificultades que tienen los estudiantes para comprender esta teoría (Barragués, 2002).

Explorar todas las facetas del significado de la probabilidad y prestar atención a los aspectos procedimentales y actitudinales resulta fundamental para aproximarse al objetivo de lograr un aprendizaje significativo. Se hace necesario, por tanto, diseñar materiales y estrategias de enseñanza didáctica y epistemológicamente fundamentados, capaces de facilitar un cambio conceptual, ontológico y metodológico en los alumnos. Será éste el objetivo de nuestros próximos trabajos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARNEA, N. (1996). *The use of computer-based analog models to improve visualization and chemical understanding.* Sevilla: ICME8.

BARRAGUES, J.I. (2002). «La enseñanza de la probabilidad en primer ciclo de universidad. Análisis de dificultades y propuesta alternativa de orientación constructivista». Tesis doctoral. San Sebastián: UPV/EHU.

BATANERO, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, pp. 2-13.

BOROVCNIK, M., BENTZ, H.J. y KAPADIA, R. (1991). A Probabilistic Perspective, en Kapadia, R. y Borovcnik, M. (eds.*). Chance encounters: probability in education*, pp. 27-70. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

BOROVCNIK, M. y PEARD, R. (1996). Probability, en Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 239-287. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

BOYER, C.B. (1968). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

COBO, B. y BATANERO, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), pp. 5-18.

DAVID, F.N. (1962). *Games, Gods and Gambling*. Nueva York: Dover Publications.

DE LORENZO, J. (1974). *La filosofía de la matemática de Poincaré*. Madrid: Tecnos.

DEL CARMEN, L. y JIMÉNEZ, M.P. (1997). Los libros de texto: un recurso flexible. *Alambique*, 11, pp. 7-22.

DE MORA, M. (1989). *Los inicios de la teoría de la probabilidad*. Bilbao: Servicio editorial de la UPV/EHU.

DÍAZ, J., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M.J. (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de una función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

FALK, R. (1983). Experimentals Models for Resolving Probabilistic Ambiguities. *Proc. Seventh Int. Conf. Psychology of Mathematics Education*. Rehovot.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

GIL, D. y DE GUZMÁN, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas*. Madrid: Editorial Popular.

GODINO, J.D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). Proceedings of the 20th PME Conference, 2, 00. 417/424. Valencia: Universidad de Valencia.

GNEDENKO, B. (1995). *Teoría de las probabilidades.* Madrid: Rubiños.

GREEN, D.R. (1982). *Probability Concepts in 11-16 Year Old Pupils*. Report Loughborough University of Technology.

GUISASOLA, J. y BARRAGUÉS, J.I. (2002a). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de Universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), pp. 285-302.

GUISASOLA, J. y BARRAGUÉS, J.I. (2002b). Formas de razonamiento de los estudiantes en el cálculo de la probabilidad en cursos introductorios de estadística de primer ciclo de universidad. *Epsilon*, 53, pp. 219-242.

HAKING, I. (1978). *The Emergenge of Probability*. Londres: Cambridge University Press.

HENNESSY, S. et al. (1995). Design of a computer-augmented curriculum for mechanics. *International Journal of Science Education*, 17(1), pp. 75-92.

HERNÁNDEZ, J. (1986). *La enseñanza de las matemáticas modernas*, pp. 13-55. Madrid: Alianza Editorial.

IZQUIERDO, M. y RIBERA, L. (1997). La estructura y la comprensión de los textos de ciencias. *Alambique*, 11, pp. 24-33.

KAHNEMAN, D. y TVERSKY, A. (1972). Subjetive Probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 5, pp. 430-454.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (1982*). Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* Nueva York: Cambridge University Press.

KILPATRICK, J. (1981). The reasonable ineflectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2).

KLINE, M. (1980). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI.

KONOLD, C. (1991). Understanding student's beliefs about probability, en Glasersfeld E.V. (ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*, pp. 139-156. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

LECOUTRE, M.P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature frécuentielle sur le judgements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (6) pp. 193-213.

LECOUTRE, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in «purely random» situations. *Educational Studies in Mathematics*, (23), pp. 557-568.

LECOUTRE, M.P. y DURAND, J.L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, (19), pp. 357-368.

LECOUTRE, M.P. y CORDIER, J. (1990). Effect du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, 372, pp. 9-22.

MARTÍNEZ, S. y REQUENA, A. (1986) *Dinámica de sistemas. 1. Simulación por ordenador*. Madrid: Alianza Editorial.

MEYER, P.L. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. EEUU: Addison-Wesley Iberoamericana.

MUÑOZ, A. (1998). Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidad. *Suma*, 29, pp. 29-34.

NAGEL, E. (1985). Significado de la probabilidad, en Newman, J.R. (ed.). *Sigma, el mundo de las matemáticas*, 3. Madrid: Grijalbo

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2000). *Principe and Standards for School Mathematics*.

NEWMAN, J.R. (1985). Pierre Simon de Laplace, en Newman, J.R. (ed.). *Sigma, el mundo de las matemáticas*, 3, pp. 2-10. Madrid: Grijalbo

ORTIZ, J.J., BATANERO, C. y SERRANO, L. (1996). Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. EMA, 2(1), pp. 29-48.

ORTIZ, J.J. (1999). «Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de bachillerato». Tesis doctoral. Universidad de Granada.

OTERO, J. (1985). Assimilation problems in traditional representation of scientific knowledge. *European Journal of Science Education*, 7(4), pp. 361-369.

POLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori/ICE.

SÁENZ, C. (1998). Teaching Probability for Conceptual Change. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), pp. 233-254.

SCHOENFELD, A.H. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education.* EEUU: Lawrence Erlbaum Associates

SCHOLZ, R.W. (1991). Psychological Research in Probabilistic Understanding, en Kapadia, R. y Borovcnik, M. (eds.). *Chance encounters: probability in education*, pp. 213-253. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

SERRANO, L., BATANERO, C. y ORTIZ, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma* (22), pp. 43-49.

SERRANO, L., BATANERO, C., ORTIZ, J. J. y CAÑIZARES, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, (22), pp. 7-25.

SHAUGHNESSY, J.M. (1992). «Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions», en Grouws, D. *Handbook of Research for Mathematics Education*. Nueva York: MacMillan.

STEINBRING, H. (1991). The theorical nature of probability in the classroom, en Kapadia, R. y Borovcnik, M. (eds.). *Chance encounters: probability in education*, pp. 135-167. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

WALDEGG, G. (1996). Los educadores de la matemática: una comunidad de enlace, en Santos, M. y Sánchez, E. (eds.). *Perspectivas en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

WELLER, H.G. (1995). Diagnosing and altering three aristotelian alternative conceptions in dinamics: microcomputer simulations of scientific models. *Journal of Research in Science Teaching*, 32(3), pp. 271-290.

WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. (1926). *Principia Mathematica*. Madrid: Paraninfo (ed. 1981).

[Artículo recibido en febrero de 2005 y aceptado en enero de 2006]

ANEXO

Libros de texto analizados

Libros de texto recomendados por los profesores

[1]. CANAVOS, G. C. (1992). *Probabilidad y estadística.* México: McGrawHill
[2]. CILLERUELO, E. y AURTENETXE, E. (1997). *Métodos estadísticos en ingeniería.* Bilbao: ETSII y de T
[3]. EGUSQUIZA, J. M. (1998). *Apuntes de métodos estadísticos de la ingeniería.* Bilbao: Geneve.
[4]. LÓPEZ CACHERO, M. (1990). *Fundamentos y métodos de estadística.* Madrid: Pirámide
[5]. MENDENHALL, W., SCHEAFFER, R. L. y WACKERLY, D. (1986). *Estadística matemática con aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.
[6]. MENDENHALL, W. y SINCICH, T. (1997). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* México: McGraw-Hill
[7]. MILLER, I. y FREUND, J. E. (1995). *Probabilidad y estadística para ingenieros.* Barcelona: Reverté
[8]. QUESADA, J. A., ISIDORO, A., y LÓPEZ, L. A. (1994). *Curso y ejercicios de estadística.* Madrid: Alhambra Universidad
[9]. SPIEGEL, M. R. (1991). *Estadística.* Madrid: McGraw-Hill
[10]. VIEDMA, J. A. (1990). *Métodos estadísticos.* Madrid: Ediciones del Castillo
[11].WALPOLE, R. E. y MYERS, R. H. (1992). *Probabilidad y estadística.* México: McGrawHill

Libros de texto adicionales consultados usualmente por los alumnos

[12]. ÁLVAREZ, S. J. (2000). *Estadística aplicada.* Madrid: CLAG
[13]. BAJPAI, A. C., CALUS, I. M. y FAIRLEY, J. A. (1981). *Métodos estadísticos para estudiantes de ingeniería y ciencias.* Mexico: Limusa.
[14]. BENJAMÍN, J. R. (1981). *Probabilidad y estadística en ingeniería civil.* Colombia: McGrawHill
[15]. CASTILLO, E. (1993). *Introducción a la estadística aplicada con mathematica.* Madrid: Díaz de Santos
[16]. DE GROOT, M. H. (1988). *Probabilidad y estadística.* EEUU: Addison-Wesley Iberoamericana
[17]. DEVORE, J. L. (1988). *Probabilidad para ingeniería y ciencias.* México: International Thomson Editores
[18]. FELLER, W. (1983). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Vol. I. México: Limusa
[19]. FERNÁNDEZ DE TROCONIZ, A. (1993). *Probabilidad, estadística, muestreo.* Albacete: Tebar Flores
[20]. GMURMAN, V. E. (1983). *Teoría de las probabilidades y estadística matemática.* Moscú: Mir
[21]. GNEDENKO, B. (1995). *Teoría de las probabilidades.* Madrid: Rubiños
[22]. HÉRAULT, D. (1973). *Elementos de teoría de la probabilidad.* Barcelona: Ediciones de Promoción Cultural
[23]. KALBFLEISCH, J. G. (1984). *Probabilidad e inferencia estadística,* Vol 1. Madrid: AC
[24]. KREYSZIG, E. (1991). *Introducción a la estadística matemática.* México: Limusa
[25]. LIPPMAN, S. A. (1976). *Elementos de probabilidades y estadística.* Barcelona: Boixareu Editores
[26]. LIPSCHUTZ, S. y SCHILLER, J. (2000). *Introducción a la probabilidad y estadística.* Madrid: McGrawHill
[27]. MARTÍN, F. J. y RUIZ-MAYA, L. (1995). *Estadística.* Tomo I. Probabilidad. Madrid: AC
[28]. MEYER, P. L. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* EEUU: Addison-Wesley Iberoamericana
[29]. MODE, E. B. (1970). *Elementos de probabilidad y estadística.* México: Reverte
[30]. MONTGOMERY, D. C. y RUNGER, G. C. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería.* México: McGrawHill
[31]. OBREGÓN, I. (1975). *Teoría de la probabilidad.* México: Limusa
[32]. PEÑA, D. (1994). *Estadística, modelos y métodos.* Tomo 1. Fundamentos. Madrid: Alianza Universidad
[33]. RÍOS, S. (1977). *Métodos estadísticos.* Madrid: Ediciones del Castillo
[34]. VILES, E. (2001). *Estadística básica para universitarios.* Pamplona: Ediciones de la Universidad de Navarra